ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА:
часть 2
математический анализ

Учебное пособие

г. Ставрополь
2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРЕДЕЛЫ

1.1. Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1;2;3;...;n;...\}$ - множество натуральных чисел;

$Z_0 = \{0;1;2;...;n;...\}$ - множество целых неотрицательных чисел;

$Z = \{0;\pm1;\pm2;...;\pm n;...\}$ - множество целых чисел;

$Q = \left\{ \dfrac{m}{n} : m \in Z,\ n \in N \right\}$ - множество рациональных чисел;

I - множество иррациональных чисел;

R - множество действительных чисел;

C - множество комплексных чисел.

Между этими множествами существуют соотношения

$$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R \subset C, \qquad R = Q \cup I.$$

1.2. Функции

Функцией называется соответствие *f*, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет *один и только один* элемент $y \in Y$, и записывается $y = f(x),\ x \in X$. Говорят еще, что функция f отображает множество *X* на множество *Y*.

Основные элементарные функции

1) Показательная функция $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$;
2) Степенная функция $y = x^{\alpha},\ \alpha \in R$;
3) Логарифмическая функция $y = log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$;
4) Тригонометрические функции $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctg\ x$;
5) Обратные тригонометрические функции $y = arcsinx$, $y = arccosx$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

1.3. Числовая последовательность. Предел последовательности

Под числовой последовательностью $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$, обозначается $\{x_n\}$, понимается функция натурального аргумента

$$x_n = f(n),\ \ n \in N \tag{1}$$

Например, $x_n = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{n}\right\}$, $y_n = \{1,4,9,...,n^2\}$.

Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{2}$$

Коротко определение предела можно записать так:

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Неравенство (2) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$ которые показывают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки a.

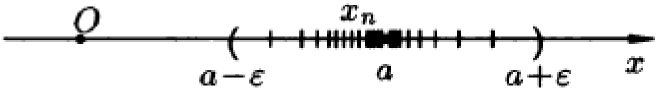


Рисунок 1 - ε-окрестность точки a

При выполнении $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к значению a.

1.4.Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть $x_0 \in X$. Возьмем из множества X последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ элементы которой отличны от x_0 $(x_n \neq x_0)$, сходящуюся к x_0. Последовательность функции $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ тоже образуют числовую последовательность.

Определение 1 (по Гейне). Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, отличных от x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу A.

Записывают $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

Функция $y = f(x)$ в точке x_o может иметь только один предел.

Определение 2 (по Коши). Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (см. рис.2).

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

В определении предела функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: слева, справа от x_0 или колеблясь около этой точки. Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов (см. рис. 3).

Предел слева и справа записывают соответственно:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A_1; \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=A_2.$$

Если в точке x_0 существуют оба предела и они равны $A_1=A_2$, то существует и предел $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Если же $A_1\neq A_2$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует.

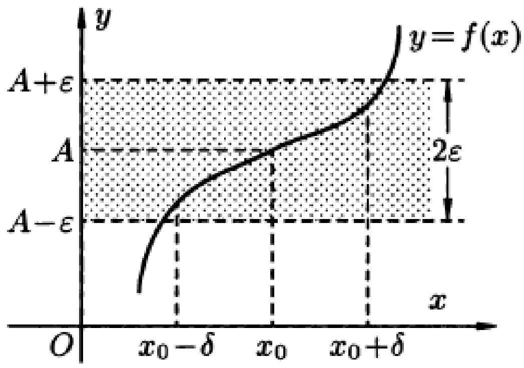


Рисунок 2 - Определение предела

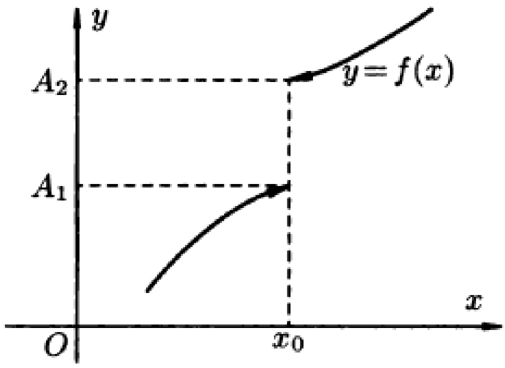


Рисунок 3 - Односторонние пределы

1.5.Бесконечно большая и малая функции

Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно большой* (б.б.ф.) *при* $x\to x_0$, если для сколь угодно большого числа $M>0$ существует число $\delta=\delta(M)>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Например, функция $y=\dfrac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x\to 2$.

Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.ф.) *при* $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Например, функция $y=x^2$ при $x\to 0$ есть б.м.ф.

Основные теоремы о бесконечных функциях

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.
3. Если функция $\alpha(x)$ - бесконечно малая $\alpha \neq 0$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция *f(x)* - бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая.

1.6. Основные теоремы о пределах

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = A \pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \cdot \varphi(x)\right] = A \cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) / \varphi(x)\right] = A/B,\ (B \neq 0).$$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} C = C$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} C\,f(x) = C \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$.

Важнейшие эквивалентности

1) $\sin x \sim x$;
2) $tg\, x \sim x$;
3) $\arcsin x \sim x$;
4) $arctg\, x \sim x$;
5) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;
6) $e^x - 1 \sim x$;
7) $a^x - 1 \sim x$;
8) $\ln(1 + x) \sim x$;
9) $\log_a(1 + x) \sim x \log_a e$;
10) $(1 + x)^k - 1 \sim kx$;
(в частности $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$).

1.7. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1. \tag{3}$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e; \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \qquad (4)$$

Вычисление пределов

1. Если при $x\to x_0$ функция определена, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

2. Если функция $f(x)$ в точке $x=x_0$ не определена, то необходимо пользуясь свойствами пределов "раскрыть" неопределенность одного из типов

«$0/0$»; «∞/∞»; «$0\cdot\infty$»; «$\infty-\infty$»; «1^∞»; «0^0»; «∞^0».

1.8. Решение типовых примеров

Вычислить пределы:

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+1}$.

Решение

Так как $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+1\right)=5\neq 0$, то применим теорему о пределе частного

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x^2+1}=\frac{4+2-2}{4+1}=\frac{4}{5}.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Решение

Функция $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ в точке $x=2$ не определена. Так как при $x=2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то имеем неопределенность вида «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было бы сократить на $x-2$. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, так как $x^2-5x+6=0$ при $x_1=2,\quad x_2=3$.

$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, так как $x^2-3x+2=0$ при $x_1=2,\quad x_2=1$.

Итак, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=\frac{2-3}{2-1}=-1.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}$.

Решение

При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, имеем неопределенность «$\frac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было сократить на $x-3$. Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное иррациональному выражению $3-\sqrt{x+6}$, то есть на выражение $3+\sqrt{x+6}$, получим

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(3-\sqrt{x+6}\right)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$ {перемножив сопряженные выражения $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, избавимся от иррациональности} =

$$=\lim_{x\to 3}\frac{9-(x+6)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=-\frac{1}{3+\sqrt{3+6}}=-\frac{1}{3+3}=-\frac{1}{6}.$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{x\cdot x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=8\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=8\cdot 1=8$$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^3+1\right)=\infty;\quad \lim_{x\to\infty}\left(3x^2+2x-1\right)=\infty$$

Следовательно, имеет место неопределенность вида «$\frac{\infty}{\infty}$». Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на старшую степень дроби, то есть на x^3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\infty.$$

Предел знаменателя равен нулю, следовательно, в знаменателе бесконечно малая функция. Далее применили теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Решение

В заданном примере имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение, то есть на $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)=\infty$, значит в знаменателе бесконечно большая функция. Далее применим теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение

Для вычисления этого предела воспользуемся первым замечательным пределом (3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^{4x+2}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^{4x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+4-4-3}{2x+4}\right)^{4x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{2x+4}\right)^{4x+2}=1^{\infty}.$$

Имеем неопределенность вида «1^{∞}». Используем второй замечательный предел (4) и следующую подстановку

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{2x+4}\right)^{4x+2}=\begin{vmatrix}\alpha=-\dfrac{7}{2x+4}\\ x\to\infty;\alpha\to0\\ x=-\dfrac{7}{2\alpha}-2\end{vmatrix}=\lim_{\alpha\to0}\left(1+\alpha\right)^{4\left(-\frac{7}{2\alpha}-2\right)+2}=$$

$$=\lim_{\alpha\to0}\left(1+\alpha\right)^{-\frac{14}{\alpha}-6}=\left(\lim_{\alpha\to0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-14}\cdot\lim_{\alpha\to0}\left(1+\alpha\right)^{-6}=e^{-14}.$$

Вычислить односторонние пределы:

Пример 9. $\lim\limits_{x\to2\pm0}\dfrac{4}{\left(x-2\right)^3}$.

Решение

Пусть $x<2$, тогда при $x\to2-0$ функции $x-2$ и $\left(x-2\right)^3$ являются отрицательными бесконечно малыми, поэтому $\dfrac{4}{\left(x-2\right)^3}$ – отрицательная бесконечно большая функция. Следовательно,

$$\lim_{x\to2-0}\frac{4}{\left(x-2\right)^3}=-\infty.$$

При $x>2$ функции $x-2$ и $\left(x-2\right)^3$– положительные бесконечно малые, поэтому $\dfrac{4}{\left(x-2\right)^3}$– положительная бесконечно большая функция, тогда

$$\lim_{x\to2+0}\frac{4}{\left(x-2\right)^3}=+\infty.$$

Пример 10. $\lim\limits_{x\to1\pm0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение

При $x\to1-0$ функция $x-1$ – отрицательная бесконечно малая, следовательно $\dfrac{1}{x-1}$ – отрицательная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно малая функция. Следовательно, $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1.$

При $x \to 1+0$ функция $x-1$ – положительная бесконечно малая, следовательно, $\frac{1}{x-1}$ – положительная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно большая положительная функция. Таким образом $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 0.$

1.9.Задания для самостоятельной работы:

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$**.**

2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 8x - 3}$**.**

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}$ **.**

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10}$**.**

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 5x + 2}{x + 10^{10}}$.

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 1}{x + 1}$.

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 5x - 6}{3x^2 + 7x - x^3 - 1}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sin 5x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

10. $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n+3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+2}{7x-1}\right)^{2x-3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tgx\right)^{ctgx}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}}{3x^2-8x-3}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 3x\cdot \mathrm{ctg}\, 5x$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2x-3}$

2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

2.1. Непрерывность функции в точке

Функция $y = f(x)$ *называется непрерывной в точке* x_0, если она определена в точке x_0 и в ее окрестности; существует предел функции в этой точке, причем равный значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5}$$

Или: *функция* $y = f(x)$ *называется непрерывной в точке* x_0, если она определена в точке x_0 и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{6}$$

Функция $y = f(x)$ *называется непрерывной, в интервале* (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

2.2. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции. Они разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 ***называется точкой разрыва первого рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$. При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется точкой, устранимого разрыва;

б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой, конечного разрыва. Величину $|A_1 - A_2|$ называют скачком функции в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 ***называется точкой разрыва второго рода*** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

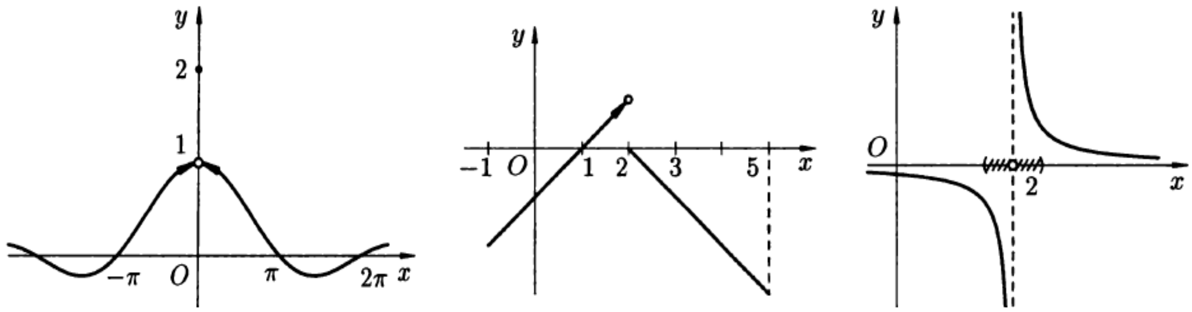


Рисунок 4 - Точки разрыва

Задания для самостоятельной работы:

Задана функция y=f(x). Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

$$f(x)=\begin{cases} x+4, \text{ если } x<-1, \\ x^2+2, \text{ если } -1\le x<1, \\ 2x, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{ если } x\le 0, \\ x^2+1, \text{ если } 0<x<1, \\ x, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2x+3}$$

3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

3.1.Определение. Уравнения касательной и нормали к кривой

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 *называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{7}$$

Если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит *физический смысл производной.*

Производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной $k = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. В этом заключается *геометрический смысл производной* (см. рис.5).

Уравнение касательной к графику функции в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \tag{8}$$

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент $k_{норм.} = -\dfrac{1}{k_{кас.}} = -\dfrac{1}{f'(x)}$. Поэтому *уравнение нормали* имеет вид (см. рис.6):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad \text{(если } f'(x_0) \neq 0\text{).} \tag{9}$$

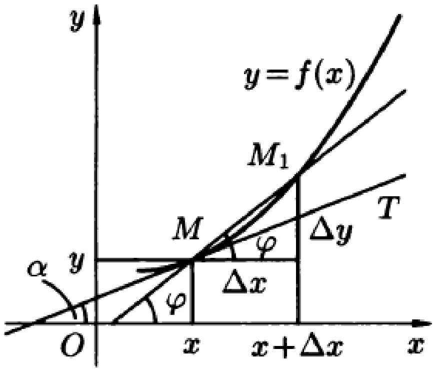


Рисунок 5 - Геометрический смысл производной

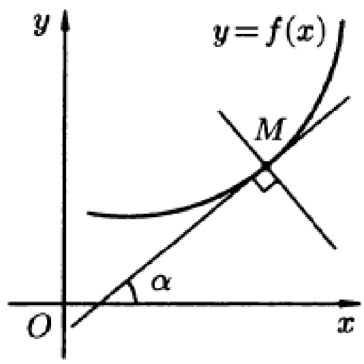


Рисунок 6 - Касательная и нормаль к графику функции

Таблица производных представлена в приложении 1.

Пример 1. Найти производную функции $y = 7^{x^2 - 4x}$.

$$y' = (7^{x^2-4x})' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (x^2 - 4x)' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (2x - 4).$$

Пример 2. Найти производные функций: 1) $y = arccosx^2$; 2) $y = x{\cdot}arctgx$;

3) $y=\left(1+5x-3x^3\right)^4$; 4) $y = arccos\sqrt{x}$; 5) $y=log_2^3\left(3+2^{-x}\right)$.

1) $((arccosx^2)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot(x^2)' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}};$

2) $\left(x{\cdot}arctgx\right)' = x'{\cdot}arctgx + x{\cdot}\left(arctgx\right)' = arctgx + \dfrac{x}{1+x^2};$

3) $\left(\left(1+5x-3x^3\right)^4\right)' = 4\left(1+5x-3x^3\right)^3\cdot\left(5-9x^2\right);$

4) $\left(arccos\sqrt{x}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

5) $(log_2^3(3+2^{-x}))' = 3log_2^2(3+2^{-x})\cdot\dfrac{1}{(3+2^{-x})ln3}\cdot 2^{-x}\cdot ln2\cdot(-1).$

Пример 3. Найти производную функции $y = log_2^3\left(tgx^4\right)$.

Решение: Данная функция является сложной. Ее можно представить в виде цепочки «простых» функций: $y=u^3$, где $u=log_2 z$, где $z = tgq$, где $q=x^4$. По правилу дифференцирования сложной функции $(y'_x = y'_u\cdot u'_z\cdot z'_q\cdot q'_x)$ получаем:

$$y'_x = 3\cdot log_2^2 tgx^4\cdot\frac{1}{tgx^4\cdot ln2}\cdot\frac{1}{cos^2 x^4}\cdot 4x^3.$$

Задания для самостоятельной работы:

Найти производные функций:

1. $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+4x-5$

2. $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3. $y = sin6x$

4. $y = (1 - 5x)^4$

5. $y = \sqrt[4]{1 + cos^2 x}$

6. $y = ln(1 + cos\, x)$

7. $y = a^{sin\, x}$

8. $y = arcsin\sqrt{1 - 4x}$

9. $y = ln\, sin\, x - \dfrac{1}{2} sin^2 x$

10. $y = \sqrt{1 - x^2} + arcsin\, x$

11. $y=(e^{\cos x}+3)^2$

12. $y=\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$

13. $y=x^{\frac{1}{x}}$

14. $y=\dfrac{1}{tg^2 2x}$

15. $y=\dfrac{x}{x-1}\ln x$

16. $y = \dfrac{sin^2 x}{2 + 3cos^2 x}$

17. $y = \sqrt{2x - sin 2x}$

18. $y = ln \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$

19. $y = ln cos x - \dfrac{1}{2} cos^2 x$

Найти уравнения касательной и нормали к графику $y = x^2$ в точке $x = 2$. Построить полученные графики.

3.2.Дифференцирование неявно заданной функции

Если неявная функция задана уравнением $F(x;y)=0$, то для нахождения производной от y по x достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию x, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Пример. Найти производную функции $x^3+y^3-3xy=0$.

Решение: Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3+y^3-3xy=0$. Из полученного соотношения $3x^2+3\cdot y^2\cdot y'-3(1\cdot y+x\cdot y')=0$ следует, что $y^2y'-xy'=y-x^2$, т.е. $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$.

3.3.Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \tag{10}$$

где t - вспомогательная переменная, называемая параметром.

Функцию $y=f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (10), можно рассматривать как сложную функцию $y=y(t)$, где $t=\varphi(x)$ - обратная для $x=x(t)$ функция. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'_x=y'_t\cdot y'_x \quad \text{или} \quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \tag{11}$$

Пример. Пусть $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^2. \end{cases}$. Найти y'_x.

$x'_t=3t^2$, $y'_t=2t$, следовательно, $y'_x=\dfrac{2t}{3t^2}$, т. е. $y'_x=\dfrac{2}{3t}$.

В этом можно убедиться, найдя непосредственно зависимость y от x. Действительно, $t=\sqrt[3]{x}$. Тогда $y=\sqrt[3]{x^2}$. Отсюда $y'_x=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, т. е. $y=\dfrac{2}{3t}$.

3.4.Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют логарифмическим дифференцированием.

Пример 1. Найти производную функции

$$y=\frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}.$$

Решение: Можно найти y' с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию:

$$\ln y=\ln(x^2+2)+\frac{3}{4}\ln(x-1)+x-3\ln(x+5).$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{x^2+2}\cdot 2x+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+1-3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

Выражаем y': $$y'=y\left(\frac{2x}{x^2+2}+\frac{3}{4(x-1)}+1-\frac{3}{x+5}\right),$$

т. е. $$y'=\frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+2}+\frac{3}{4(x-1)}+1-\frac{3}{x+5}\right).$$

Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая степенно-показательная функция $y=u^v$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - заданные дифференцируемые функции от x. Найдем производную этой функции:

$$\ln y=v\cdot\ln u,\Rightarrow\frac{1}{y}\cdot y'=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u',\Rightarrow y'=y(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'),$$

т.е. $y'=u^v(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'),$

или $$(u^v)'=u^v\cdot\ln u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'. \qquad (12)$$

Итак: *производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии* $u=const$, *и производной степенной функции, при условии* $v=const$.

Пример 2. Найти производную функции $y=\left(\sin 2x\right)^{x^2+1}$.

Решение: Пользуясь формулой (12), получаем:

$$y'=(\sin 2x)^{x^2+1}\cdot\ln\sin 2x\cdot 2x+(x^2+1)(\sin 2x)^{x^2}\cdot\cos 2x\cdot 2.$$

3.5.Производные высших порядков явно заданной функции

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$.

Пример. Найти производную 4-го порядка функции $y = sinx$.

Решение:

$$y' = \left(sin\,x\right)' = cos\,x = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(cosx\right)' = -sinx = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right),$$

$$y''' = \left(-sin\,x\right)' = -\,cos\,x = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 3\right),$$

$$y^{IV} = (-cos\,x)' = sin\,x = sin(\,x + \frac{\pi}{2}\cdot 4\,).$$

3.6.Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F\left(x;y\right) = 0$.

Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y', найдем производную первого порядка (первую производную). Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и y'. Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

Пример. Найти y''', если $x^2 + y^2 = 1$.

Дифференцируем уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ по x: $2x + 2y\cdot y' = 0$.

Отсюда $y' = -\dfrac{x}{y}$. Далее имеем:

$$y'' = -\frac{1\cdot y - x\cdot y'}{y^2},\ \text{т.е.}\ y'' = -\frac{y - x\cdot\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}\ (\text{т. к. } x^2 + y^2 = 1),$$

следовательно, $y''' = -\dfrac{-1\cdot 3y^2\cdot y'}{y^6} = \dfrac{3}{y^4}\cdot\left(-\dfrac{x}{y}\right) = -\dfrac{3x}{y^5}$.

3.7.Производные высших порядков параметрически заданных функций

Из определения второй производной и равенства (11) следует, что

$$y''_{xx} = (\,y'_x\,)'_x = (\,y'_x\,)'_t\cdot t'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t},\qquad \text{т. е.}\qquad y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}. \tag{13}$$

Аналогично получаем $y'''_{xxx} = \dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$, $y^{IV}_{xxxx} = \dfrac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}$,...

Пример. Найти вторую производную функции $\begin{cases} x = cos\, t, \\ y = sin\, t. \end{cases}$,

Решение: По формуле (11)

$$y'_x = \frac{(sin\, t)'_t}{(cos\, t)'_t} = \frac{cos\, t}{-sin\, t} = -ctgt.$$

Тогда по формуле (13): $y''_{xx} = \dfrac{(-ctgt)'_t}{(cos\, t)'_t} = \dfrac{\dfrac{1}{sin^2 t}}{-sin\, t} = -\dfrac{1}{sin^3 t}$.

Задания для самостоятельной работы:

1.Найти производные данных функций.

а) $\dfrac{y}{x} = arctg\,\dfrac{x}{y}$

б) $y \sin x = cos(x - y)$

в) $tg\frac{y}{x} = 5x$

г) $y^2x = e^{\frac{y}{x}}$

2.Найти производную 2-го порядка:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

3.Найти вторую производную функций

$$\begin{cases} x = cos\dfrac{t}{2}, \\ y = t - sin t. \end{cases}$$

4.Найти y'', если:

$$x - y + a\sin y = 0$$

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Дифференциалом функции $y = f(x)$ *в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается* dy*:*

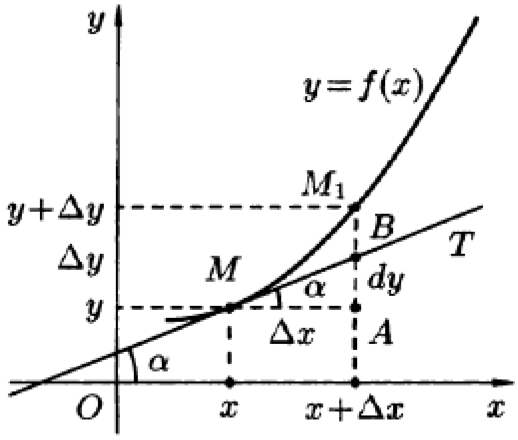


Рисунок 7 - Геометрический смысл дифференциала

$$dy = f'(x) \cdot dx. \tag{14}$$

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции ($dy = AB$, см. рис.7), когда x получит приращение Δx.

Пример 1. Найти дифференциал функции $f(x) = 3x^2 - sin(l + 2x)$.

Решение: По формуле $dy = f'(x)dx$ находим

$dy = \left(3x^2 - sin(l + 2x)\right)' dx = \left(6x - 2cos(l + 2x)\right)dx.$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1}$. Вычислить dy при $x = 0$.

Решение:

$$dy = \left(ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1}\right)' dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)dx.$$

Подставив $x = 0$, получим

$$dy\big|_{x=0} = \left(\frac{10}{2} + 0\right)dx = 5dx.$$

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции $dy = f'(x)dx$ и соответствующие теоремы о производных.

Первый дифференциал функции $y = f(x)$ определяется одной и той же формулой независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента. Это свойство дифференциала называют ***инвариантностью*** (неизменностью) формы первого дифференциала

$$dy = y'_u \cdot du, \quad \text{если } y = f(u),\ u = \varphi(x). \tag{15}$$

4.1. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

основано на приближенном равенстве, справедливом при малых Δx

$$\Delta y \approx dy. \tag{16}$$

Подставляя в равенство (16) значения Δy и dy, получим

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\cdot\Delta x;$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x, \tag{17}$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Формула (17) используется для вычислений приближенных значений функций.

Пример. Вычислить приближенно $arctg1,05$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = arctgx$. По формуле (17) имеем:

$$arctg(x+\Delta x) \approx arctgx + (arctgx)'\cdot\Delta x,$$

т. е.
$$arctg(x+\Delta x) \approx arctgx + \frac{\Delta x}{1+x^2}$$

Так как $x+\Delta x = 1,05$, то при $x = 1$ и $\Delta x = 0,05$ получаем:

$$arctg1,05 \approx arctg1 + \frac{0,05}{1+1} = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,810.$$

4.2. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y.

$$d^2y = f''(x)dx^2. \tag{18}$$

Здесь dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Аналогично определяется и находится дифференциал n-го порядка:

$$d^3y = f'''(x)(dx)^3; \qquad d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Пример. Найти d^2y, если $y = e^{3x}$ и x - независимая переменная.

Решение: Так как $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$, то по формуле (18) имеем $d^2y = 9e^{3x}dx^2$.

Задания для самостоятельной работы:

1.Найти дифференциал функции:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x;$

б) $y=\sqrt{1+x^2}$;

в) $r=2\varphi-\sin 2\varphi$;

г) $x=\dfrac{1}{t^2}$;

д) $d\left(\dfrac{a}{x}+\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{a}\right)$;

2. Найти d^2y, если

а) $y=e^{\cos 5x}$

б) $y=\sin^4 3x$

в) $y = 3^{arctgx^3}$

г) $y = 2tg^3(x^2 + 1)$

4. Вычислить приближенные значения выражений:

а) $arcsin 0,51$

б) $\sqrt[4]{15,8}$

в) $tg 46^o$

5. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

5.1.Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $0/0$ и ∞/∞.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$. Пусть $\varphi'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0.

Тогда, *предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l. \qquad (19)$$

Замечания:

1. Правило Лопиталя (19) верно и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x=x_0$, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0.$

2. Формула (19) справедлива и в том случае, когда $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ выражения (19), то правило Лопиталя можно применить еще раз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1}=1.$$

Пример 2.Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x}{1}=9.$$

Раскрытие неопределенностей различных видов

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, которые называют *основными*. Неопределенности вида $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, \infty^{0}$, 0^{0} сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение: Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Логарифмируем выражение $A=\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$, получим: $\ln A=\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x$. Затем находим предел:

$$\lim_{x\to 0}\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\left(-\sin 2x\right)2}{2x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{tg 2x}{2x}=-2,$$

т. е. $\ln\lim\limits_{x\to 0}A=-2$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}A=e^{-2}$, и $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}$.

Задания для самостоятельной работы:

1. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x-2}{\ln x}$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{tgx}$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - arctgx}{x^3}$.

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

5.2. Исследование функций

Возрастание и убывание функции. Условия экстремума

Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ для $\forall x \in (a;b)$.

Необходимое условие экстремума: если *дифференцируемая* функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю:

$f'(x_0)=0$. Геометрически равенство $f'(x_0)=0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y=f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Отметим, что обратное утверждение в общем случае не является верным, т. е. если $f'(x_0)=0$, то это не значит, что x_0 - точка экстремума.

Кроме того, существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y=|x|$ в точке $x=0$ производной не имеет, но точка $x=0$ - точка минимума.

Непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются *критическими*.

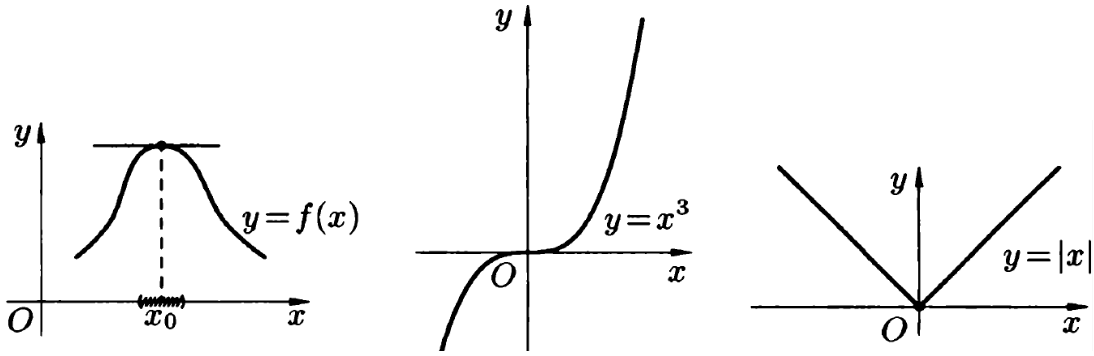


Рисунок 8 - Критические точки

Достаточное условие экстремума: если непрерывная функция $y=f(x)$ *дифференцируема* в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) *производная* $f'(x)$ *меняет знак* с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

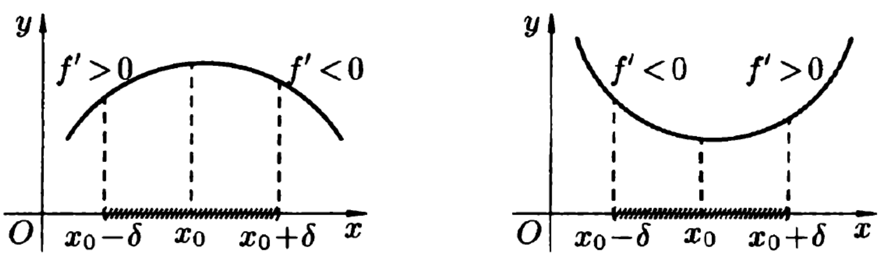


Рисунок 9 - Достаточное условие экстремума

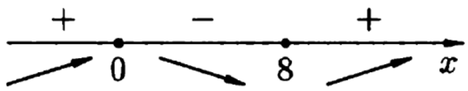
Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы.

Пример. Найти экстремум функции $y=\dfrac{x}{3}-\sqrt[3]{x^2}$.

Решение: Очевидно, $D(y)=R$.

Находим $y'=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$, т. е. $y'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}}$.

Производная не существует при $x_1=0$ и равна нулю при $x_2=8$. Эти точки разбивают всю область определения данной функции на три интервала $(-\infty;0)$, $(0;8)$, $(8;\infty)$. Отметим на рисунке знаки производной слева и справа от каждой из критических точек.

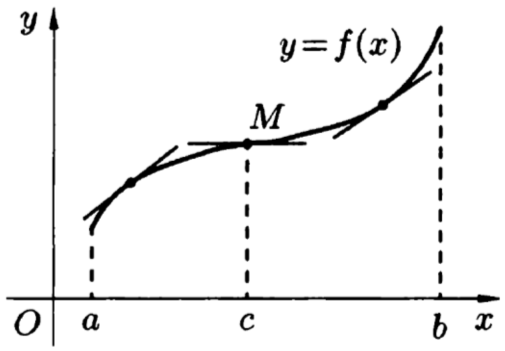


Следовательно, $x_1=0$ - точка максимума, $y_{max}=y(0)=0$, и $x_2=8$ точка минимума, $y_{min}=y(8)=-\dfrac{4}{3}$.

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *выпуклым вниз* на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции $y=f(x)$ называется *выпуклым вверх* на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.



Точка графика непрерывной функции $y=f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Если функция $y=f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет *отрицательную вторую производную,* т. е. $f''(x)<0$, то график функции в этом интервале *выпуклый вверх.* Если же $f''(x)>0$ $\forall x\in(a;b)$ - график *выпуклый вниз.*

Достаточное условие существования точек перегиба. Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Пример. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^5 - x + 5$.

Решение: Находим, что $y' = 5x^4 - 1$, $y'' = 20x^3$. Вторая производная существует на всей числовой оси; $y'' = 0$ при $x = 0$.

Отмечаем, что $y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Следовательно, график функции $y = x^5 - x + 5$ в интервале $(-\infty;0)$ выпуклый вверх, в интервале $(0;8)$- выпуклый вниз. Точка $(0;5)$ есть точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой. Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$. Обычно это точки разрыва второго рода.

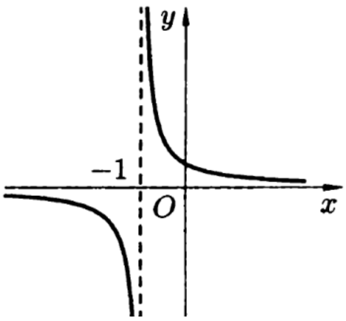


Рисунок 10 - Вертикальная и горизонтальная асимптоты

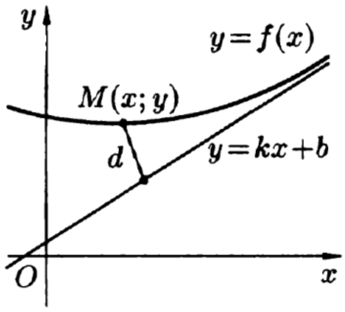


Рисунок 11 - Наклонная асимптота

Например, кривая $y = \dfrac{2}{x+1}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -1$, так как

$\lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{2}{x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1-0} \dfrac{2}{x+1} = -\infty$.

Уравнение *наклонной асимптоты* будем искать в виде

$$y = kx + b, \tag{20}$$

где

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \infty} (y - kx). \tag{21}$$

Если хотя бы один из пределов (21) не существует или равен бесконечности, то кривая $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет.

В частности, если $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Поэтому $y = b$ - уравнение *горизонтальной асимптоты*.

Замечание: Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов (21) следует отдельно рассматривать случай, когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$.

Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности функции.
6. Найти экстремумы функции.
7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведенного исследования построить график функции. Заметим, что приведенная схема исследования не является обязательной. В более простых случаях достаточно выполнить лишь несколько операций.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ и построить ее график.

Решение: Выполним все семь операций предложенной выше схемы исследования.

1. Функция не определена при $x = 1$ и $x = -1$. Область ее определения состоит из трех интервалов $(-\infty; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; +\infty)$, а график из трех ветвей.

2. Если $x = 0$, то $y = 0$. График пересекает ось Oy в точке $O(0;0)$; если $y = 0$, то $x = 0$. График пересекает ось Ox в точке $O(0;0)$.

3. Функция $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ является нечетной, т. к.

$$y(-x) = \frac{-x}{1 - (-x)^2} = -\frac{x}{1 - x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x \geq 0$.

4. Прямые $x=1$ и $x=-1$ являются ее вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$$

($k=0$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$)

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1-x^2}-0x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2}=0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота, ее уравнение $y=0$. Прямая $y=0$ является асимптотой и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$.

5. Находим интервалы возрастания и убывания функции. Так как

$$y'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1\left(1-x^2\right)-x\left(-2x\right)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2},$$

то $y'>0$ в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

6. Исследуем функцию на экстремум. Так как $y'=\dfrac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2}$, то критическими точками являются точки $x_1=1$ и $x_2=-1$ (y' не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

7. Исследуем функцию на выпуклость. Находим

$$y''=\left(\frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2}\right)'=\frac{2x\left(1-x^2\right)^2-\left(x^2+1\right)2\left(1-x^2\right)\left(-2x\right)}{\left(1-x^2\right)^4}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1=0, x_2=-1,$ $x_3=1$. На рисунке 12 представлена схема изменения знаков второй производной исследуемой функции. Точка $O(0,0)$ - точка перегиба графика функции. График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$.

График функции изображен на рисунке 13.

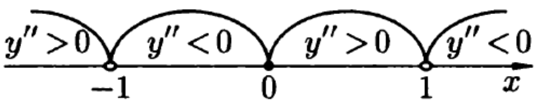


Рисунок 12

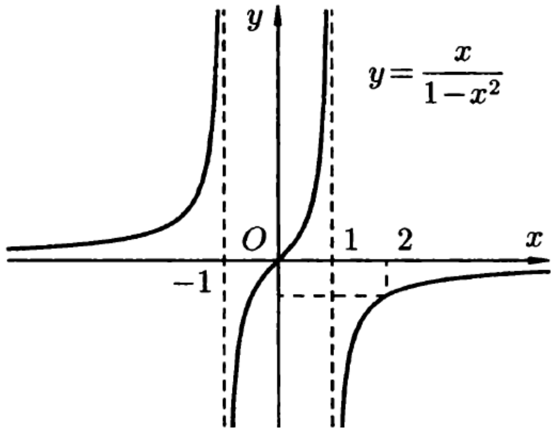


Рисунок 13

Задания для самостоятельной работы:

Построить графики функций

1. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

2. $y = 3x^2 - 2 - x^3$

3. $y = x^4 - 4x^2 + 3$

4. $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}, \quad [-4, 2].$

6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. Понятие неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ - множество всех первообразных $F(x)+C$ для $f(x)$, который обозначается символом $\int f(x)dx$

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \qquad (22)$$

6.2. Свойства неопределенного интеграла

В соответствие с определением (22) неопределенный интеграл обладает следующими свойствами.

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

Используется для проверки «правильности» интегрирования.

2. $\int dF(x) = F(x)+C.$

3. $\int af(x)dx = a\cdot\int f(x)dx, \quad a\neq 0$ - постоянная.

4. $\int\left(f(x)\pm g(x)\right) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

5. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)\cdot dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

Пример: $\int sin\left(2x-5\right)\cdot dx = -\frac{1}{2}cos\left(2x-5\right)+C$.

6. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(u)du = F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Так из формулы $\int u^2du = \frac{u^3}{3}+C$ для различных $u=\varphi(x)$ получаем:

$$\int sin^2x\cdot cos\,x\cdot dx = \int sin^2x\cdot d\left(sin\,x\right) = \frac{sin^3x}{3}+C,$$

$$\int\frac{ln^2x}{x}dx = \int ln^2x\cdot d\left(ln\,x\right) = \frac{ln^3x}{3}+C,$$

$$\int\frac{tg^2x}{cos^2x}dx = \int tg^2x\cdot d\left(tgx\right) = \frac{tg^3x}{3}+C.$$

Таблица основных интегралов представлена в приложении 2.

7. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

7.1. Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

При сведении данного интеграла к табличному часто используется операция подведения под знак дифференциала:

$$du = d\left(u \pm a\right), \qquad du = \frac{1}{a}d\left(au\right), \quad \text{где } a - \text{число},$$

$$\cos u du = d\left(\sin u\right), \qquad \sin u du = -d\left(\cos u\right),$$

$$\frac{1}{u}du = d\left(\ln u\right), \qquad \frac{1}{\cos^2 u}du = d\left(tg u\right).$$

Вообще, $f'\left(u\right)du = d\left(f\left(u\right)\right)$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры:

1. $$\int\left(2x^4 - 3x^2 + x - 5\right)dx = 2\int x^4dx - 3\int x^2dx + \int xdx - \int 5dx =$$
$$= \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

2. $$\int\frac{x+1}{x}dx = \int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = x + ln\left|x\right| + C,$$

3. $$\int\frac{dx}{x+3} = \int\frac{d\left(x+3\right)}{x+3} = ln\left|x+3\right| + C,$$

4. $$\int\left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right)dx = 4\int x^3dx - 5\int\frac{dx}{\cos^2 2x} + \int 3^{1-x}dx =$$
$$= x^4 - \frac{5}{2}tg2x - \frac{3^{1-x}}{ln3} + C,$$

5. $$\int\left(3x-1\right)^{24}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(3x-1\right)^{25}}{25} + C;$$

6. $$\int ctg^2xdx = \int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -ctgx - x + C,$$

7. $$\int\sin^2 6xdx = \frac{1}{2}\int\left(1 - \cos 12x\right)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{12}\sin 12x\right) + C,$$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+1+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+2}} =$

$= \int \frac{dx(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(\sqrt{2})^2}} = ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C;$

9. $\int x(x+2)^9 dx = \int (x+2-2)(x+2)^9\,dx = \int (x+2)^{10}\,dx - 2\int (x+2)^9\,dx =$

$= \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2\frac{(x+2)^{10}}{10} + C;$

10. $\int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot x \cdot (x^2+1-1)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{4}{3}} d(1+x^2) - \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} d(1+x^2) = \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$

Задания для самостоятельной работы:

1. $\int \left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$

2. $\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$

3. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx$

4. $\int \frac{cos\,2x}{sin\,x\,cos\,x}dx$

5. $\int\left(2x\sqrt{x}-7x\right)^2 dx$

6. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx.$

7. $\int sin^2\frac{x}{2}dx.$

8. $\int e^{-3x}dx.$

9. $\int(3-2x)^4dx.$

10. $\int e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}dx$

11. $\int\frac{x-2}{x^3}dx$

12. $\int\frac{dx}{sin^2 x\,cos^2 x}$

13. $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

7.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

В ряде случаев подынтегральное выражение удается представить в виде

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx. \qquad (23)$$

Тогда используя замену переменной интегрирования (подстановку) $t = \varphi(x)$, исходный интеграл приводится к новому, более простому интегралу:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} = \int f(t)dt. \qquad (24)$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Примеры:

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \begin{vmatrix} t = \sqrt{3} \cdot x \\ dt = \sqrt{3} \cdot dx \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2 - t^2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arcsin\frac{t}{2} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arcsin\frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} + C;$$

2. $\int tgudu = \int \frac{sinu \cdot du}{cosu} = -\int \frac{d(cosu)}{cosu} = -ln|cosu| + C$ (вывод формулы 7);

3. $$\int \frac{dx}{ctg^5 x \cdot sin^2 x} = \begin{vmatrix} t = ctgx \\ dt = \dfrac{-dx}{sin^2 x} \end{vmatrix} = -\int t^{-5}dt = -\frac{t^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{4ctg^4 x} + C \;;$$

4. $$\int x \cdot \sqrt{x-3}dx = \begin{vmatrix} t = \sqrt{x-3} \\ x = t^2 + 3 \\ dx = 2t \cdot dt \end{vmatrix} = \int (t^2+3) \cdot t \cdot 2tdt = 2\int (t^4 + 3t^2)dt =$$
$$= 2\int t^4 dt + 6\int t^2 = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C.$$

5. $$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \begin{vmatrix} e^x = t \\ x = lnt \\ dx = \dfrac{dt}{t} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2 + t} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} =$$

$$=-\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right|+C=-ln\left|\frac{t+1}{-t}\right|=ln\left|\frac{t}{t+1}\right|=ln\frac{e^x}{e^x+1}+C.$$

Задание для самостоятельной работы:

1. $\int 5x\sqrt{1-2x^2}\,dx$

2. $\int \frac{x^2\,dx}{\left(3+2x^3\right)^2}$

3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+7}}$

4. $\int \frac{3^{arctg\,x}}{1+x^2}dx$

5. $\int sin^2 x\,cos\,xdx.$

6. $\int \frac{cos\,xdx}{sin^4 x}.$

7. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$

8. $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

9. $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$

10. $\int \frac{e^{3x}\,dx}{1-e^{3x}}$

11. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\,\sqrt{1-x^2}}$

7.3. Метод интегрирования по частям

Рассмотрим функцию, которая представляет собой произведение двух других, более простых функций, имеющих непрерывные производные

$$g(x)=u(x)\cdot v(x) \quad \text{или кратко} \quad g=u\cdot v.$$

Тогда ее дифференциал примет вид $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$. Интегрируя это равенство, получим $\int d(uv)=uv=\int udv+\int vdu$, откуда получаем формулу интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu. \tag{25}$$

Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int f(x)dx=\int udv$ к вычислению более простого интеграла $\int vdu$.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv; затем, после нахождения $v=\int dv$ и $du=u'dx$, используется формула (25) интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Примеры:

1. $$\int(2x+1)e^{3x}dx=\left|\begin{array}{l} u=2x+1\Rightarrow du=2dx \\ dv=e^{3x}dx\Rightarrow v=\int e^{3x}dx=\dfrac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right|=(2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}2dx=$$
$$=\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+C.$$

2. $$\int x\sin xdx=\left|\begin{array}{l} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\sin xdx\Rightarrow v=-\cos x\end{array}\right|=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$$

3. $$\int x^2e^xdx=\left|\begin{array}{l} u=x^2\Rightarrow du=2xdx \\ dv=e^xdx\Rightarrow v=e^x\end{array}\right|=x^2e^x-2\int e^x\cdot xdx=\left|\begin{array}{l} u_1=x\Rightarrow du_1=dx \\ dv_1=e^xdx\Rightarrow v_1=e^x\end{array}\right|=$$
$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)=x^2e^x-2\left(xe^x-e^x\right)+C=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C;$$

Некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

а) Интегралы вида $\int P(x)a^{kx}dx$, $\int P(x)\cdot\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$,

где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u=P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители. Этому случаю соответствуют рассмотренные выше примеры.

б) Интегралы вида $\int P(x)arcsin\,xdx,\ \int P(x)arccos\,xdx,\ \int P(x)ln(x)dx,$
$\int P(x)arctg(x)dx,\ \int P(x)arcctg(x)dx$.

Удобно положить $P(x)dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

Примеры:

1. $$\int ln\,x\cdot dx = \left|\begin{matrix} u = ln\,x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix}\right| = x\cdot ln\,x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\cdot ln\,x - x + C.$$

2. $$\int arctgxdx = \left|\begin{matrix} u = arctgx \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix}\right| = x\cdot arctgx - \int\frac{x}{1+x^2}dx =$$
$$= x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}ln\left(1+x^2\right) + C.$$

в) **_Интегралы вида_** $\int e^{ax}\cdot sin\,bxdx,\ \int e^{ax}\cdot cos\,bxdx,$, где а и b — числа, называются циклическими.

Они вычисляются двойным применением формулы (25). За u можно принять, как функцию $u = e^{ax}$, так и $u = cos\,bx$.

Пример. Вычислить интегралы

$I_1 = \int e^{ax}cos\,bxdx$ и $I_2 = \int e^{ax}sin\,bxdx.$

Для I_1 получим

$$\int e^{ax}cos\,bxdx = \left|\begin{matrix} u = e^{ax}, & du = ae^{ax}dx, \\ dv = cos\,bxdx, & v = \frac{1}{b}sin\,bx, \end{matrix}\right| = \frac{1}{b}e^{ax}sin\,bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}sin\,bxdx.$$

К последнему интегралу снова применим интегрирования по частям:

$$\int e^{ax}sin\,bxdx = \left|\begin{matrix} u = e^{ax}, & du = ae^{ax}dx, \\ dv = sin\,bxdx, & v = -\frac{1}{b}cos\,bx \end{matrix}\right| = -\frac{1}{b}e^{ax}cos\,bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}cos\,bxdx.$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим

$$\int e^{ax}cos\,bxdx = \frac{1}{b}e^{ax}sin\,bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}cos\,bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}cos\,bxdx.$$

Найдем из последнего равенства I1:

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right) + C\frac{a^2+b^2}{b^2},$$

откуда $\quad I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx = \dfrac{e^{ax}\left(b\sin bx + a\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C.$

Аналогично находим $\quad I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx = \dfrac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C.$

Пример (вывод формулы 14). $I = \int\sqrt{a^2-x^2}dx = ?$

Произведем тождественные преобразования. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{a^2-x^2}$:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\arcsin\frac{x}{a} - \int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям:

$$\int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left|\begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}, & v = -\sqrt{a^2-x^2} \end{matrix}\right| = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Подставляя последний результат в полученное ранее выражение данного интеграла, будем иметь

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Перенося интеграл справа налево и выполнив элементарные преобразования, окончательно получим

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. $\int(2-x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

2. $\int(2x+3)\,ln\;x\;dx$

3. $\int e^{2x}\,sin3x\,dx$

4. $\int(\,x^2-5x-1\,)\,cos\;6x\;dx$

5. $\int x^3 \, arctg \; x \, dx$

6. $\int x^2 \cdot 5^{\frac{x}{2}} \, dx$

7. $\int \frac{ln \; x}{x^2} \, dx$

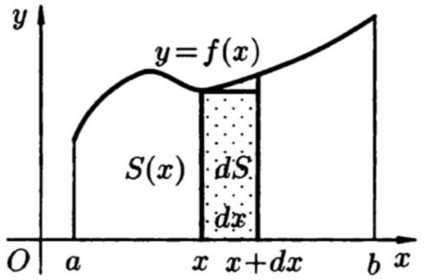
8. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

8.1.Определенный интеграл и его свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ - предел интегральной суммы при $max\Delta x_i \to 0$, если он не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$, ни от выбора точек ξ_i на отрезках $[x_{i-1},x_i]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,. \qquad (26)$$

Геометрический смысл определенного интеграла (26) - площадь криволинейной трапеции *S(x)*, если $f(x) \geq 0$ (см. рис. 14):



$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ или } S = \int_a^b ydx. \qquad (27)$$

Криволинейная трапеция ограничена линиями

$$y = f(x) \geq 0, \ x = a, \ x = b, \ y = 0$$

Рисунок 14 - Геометрический смысл определенного интеграла

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^b \left[c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)\right]dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)dx; \qquad (28)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; \qquad (29)$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \qquad (30)$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi). \qquad (31)$$

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (32)$$

где $F(x)$ - какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$.

Замена переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt, \quad где \ \ x = \varphi(t), \ \ \varphi(\alpha) = a, \ \ \varphi(\beta) = b. \qquad (33)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_4^{16} \frac{\sqrt{x}}{x\left(\sqrt{x}-1\right)}dx$.

Применим подстановку $\sqrt{x}=t; x=t^2; dx=2t\cdot dt$. Воспользуемся формулой замены переменной (33) и определим новые пределы интегрирования: $x=4 \text{ при } t=2,\ x=16 \text{ при } t=4$, получим

$$\int\limits_4^{16} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)}dx=\int\limits_2^4 \frac{t\cdot 2t}{t^2(t-1)}dt=2\int\limits_2^4 \frac{dt}{t-1}=2\ln\left|t-1\right|\Big|_2^4=2\left(\ln 3-\ln 1\right)=2\ln 3.$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3x dx$.

Дважды применим формулу интегрирования по частям: $\int\limits_a^b u dv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v du.$

$$\int\limits_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3x dx=\begin{vmatrix} u=x^2-4 & dv=\cos 3x dx \\ du=2x dx & v=\dfrac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix}=\frac{1}{3}(x^2-4)\sin 3x\Big|_{-2}^{0}-$$

$$-\frac{2}{3}\int\limits_{-2}^{0}x\sin 3x dx=\begin{vmatrix} u=x & dv=\sin 3x dx \\ du=dx & v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{vmatrix}=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x\Big|_{-2}^{0}+\frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{0}\cos 3x dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\cos 6+\frac{1}{9}\sin 3x\Big|_{-2}^{0}\right)=\frac{4}{9}\cos 6-\frac{2}{27}\sin 6.$$

Для вычисления несобственных интегралов необходимо применить предельный переход, то есть изменить пределы интегрирования так, чтобы они стали конечными (для несобственных интегралов 1-го рода) и подынтегральная функция сохранила непрерывность внутри и на концах нового промежутка интегрирования (для несобственных интегралов 2-го рода).

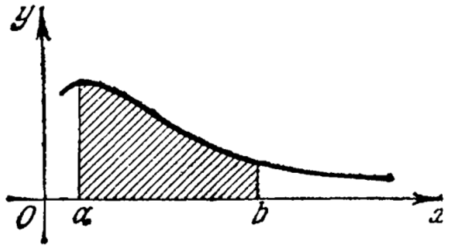


Рисунок 15

Интеграл с бесконечным пределом интегрирования (1-го рода)

$$\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx. \qquad (34)$$

Если этот предел *существует, то интеграл сходится*, иначе - *расходится*.

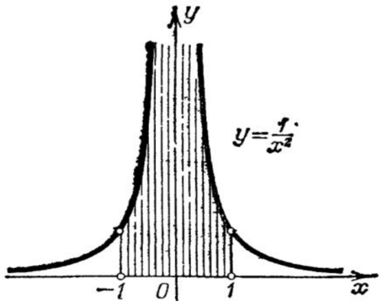


Рисунок 16

Интеграл от разрывной функции (2-го рода)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_a^{\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^b f(x)dx. \tag{35}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Используя выражение (34) для несобственного интеграла 1-го рода, имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} arctg\, x\Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Так как подынтегральная функция разрывна в точке $x=0$, то данный несобственный интеграл 2-го рода нужно представить как сумму двух слагаемых (35):

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Вычислим каждый предел отдельно:

$$\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty;$$

$$\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) = \infty.$$

Интеграл расходится, как на участке $[-1,0]$, так и на участке $[0,1]$.

Таким образом, данный интеграл расходится на всем отрезке $[-1,1]$.

Отметим, что если вычислять данный интеграл, не обращая внимания на разрыв подынтегральной функции, то получим неверный результат:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1} \right) = -2,$$

что невозможно (см. рисунок 16).

Задания для решения в аудитории:

1) Вычислить определенный интеграл.

1. $\int_0^1 x^2 dx$

2. $\int_1^2 2^{3x-4} dx$

3. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

4. $\int_0^1 xe^{-x} dx$

5. $\int_{-1}^0 \left(x^2+2x+1\right)\sin 3x dx$

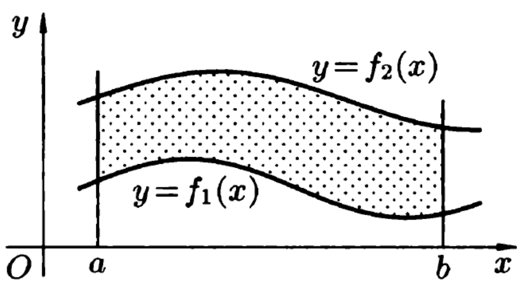
2). Изобразить график подынтегральной функции и найти несобственный интеграл

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$

2. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x} dx$

3. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2}}$

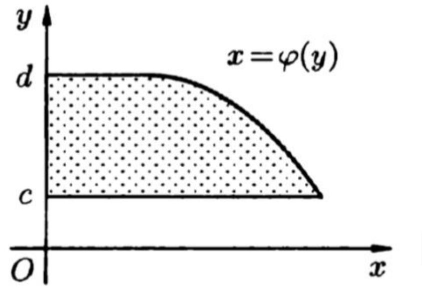
8.2.Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла



Интегрирование **по *x*** в декартовой системе координат (СК)

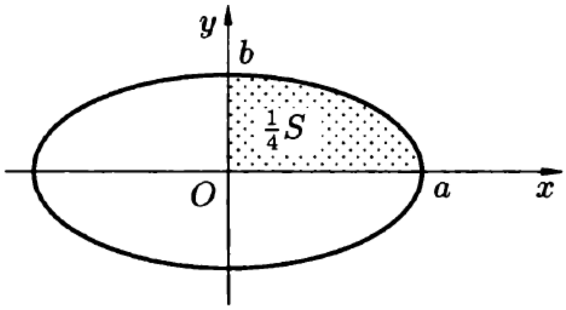
$$S=\int_a^b y\cdot dx,\quad y=f\left(x\right); \tag{36}$$

$$S=\int_a^b\left[f_2\left(x\right)-f_1\left(x\right)\right]dx. \tag{37}$$



Интегрирование **по *y*** в декартовой системе координат

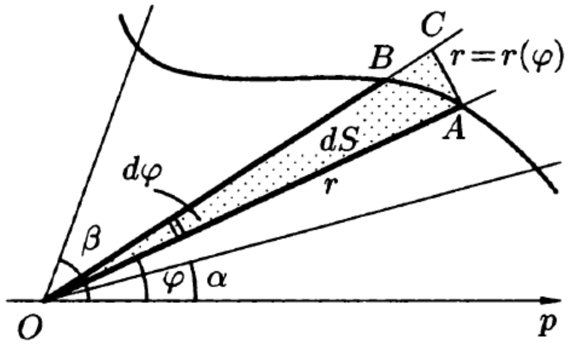
$$S=\int_c^d x\cdot dy,\quad x=\varphi\left(y\right). \tag{38}$$



Для параметрически заданных функций в декартовой СК

$$\begin{cases} x=x\left(t\right), \\ y=y\left(t\right), \end{cases}\quad t\in\left[\alpha;\beta\right],$$

$$S=\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} ydx=\int_\alpha^\beta y\left(t\right)\cdot x'\left(t\right)dt. \tag{39}$$



В полярной системе координат

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\left(\varphi\right)d\varphi. \tag{40}$$

Для определения площадей фигур, ограниченных сверху и снизу заданными кривыми $y_1(x), y_2(x)$, прежде чем применять соответствующую формулу для нахождения площади нужно определить пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения кривых $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$. Они находятся как решения уравнения: $y_1(x)=y_2(x)$. Корни этого уравнения x_1, x_2, причем $x_1<x_2$ являются пределами интегрирования.

Пример 1. Вычислить сегмент площади фигуры, ограниченной графиками функций $y=(x-2)^3,\quad y=4x-8.$

Найдем точки пересечения графиков функций: $(x-2)^3=4x-8,$

$(x-2)^3=4(x-2);\quad (x-2)\left((x-2)^2-4\right)=0;$

$(x-2)=0;\ \to x_1=0;\qquad (x-2)^2=4;\ \to\ x_2=2,\ x_3=4.$

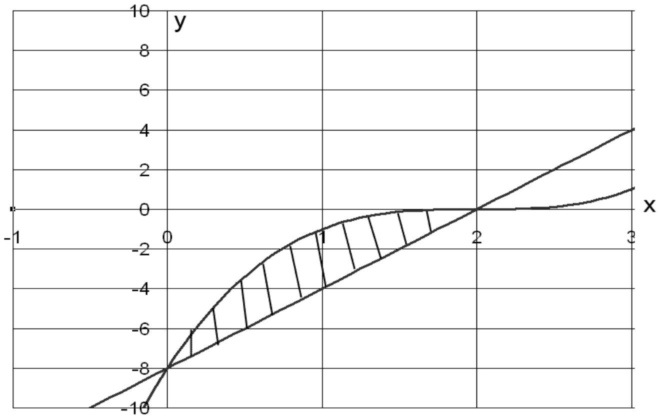


Рисунок 17

Тогда первый сегмент площади отыщется следующим образом (37)

$$S=2\int_0^2(4x-8-(x-2)^3)dx=2\int_0^2(4x-8-x^3+6x^2-12x+8)dx=$$

$$=2\int_0^2(6x^2-x^3-8x)dx=2(2x^3-\frac{1}{4}x^4-4x^2)\Big|_0^2=4\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^4-8\cdot 2^2=8.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ (см. рисунок 18).

Найдем сначала четвертую часть площади *S*. Здесь *x* изменяется от 0 до *a*, следовательно, *t* изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0. По формуле (39) получим

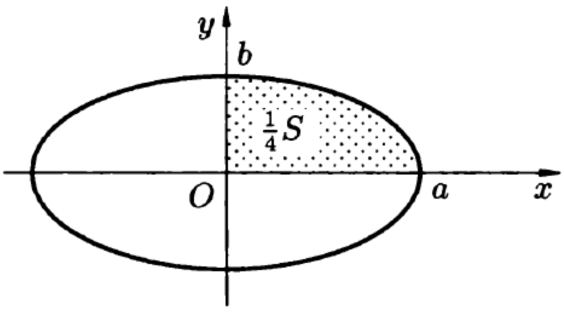


Рисунок 18

$$\frac{1}{4}S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot\left(-a\sin t\right)dt=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt=$$

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi ab}{4}.$$

Таким образом, $\frac{1}{4}S=\frac{\pi ab}{4}$. Значит, площадь всего эллипса $S=\pi ab.$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r=a\cos 3\varphi$ (см. рисунок 19).

Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. шестую часть всей площади фигуры:

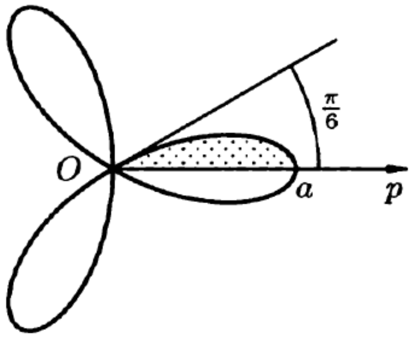


Рисунок 19

$$\frac{1}{6}S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(a\cos 3\varphi\right)^2 d\varphi=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(1+\cos 6\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}+0\right)=\frac{\pi a^2}{24},$$

т. е. $\frac{1}{6}S=\frac{\pi a^2}{24}$. Следовательно, $S=\frac{\pi a^2}{4}$.

Задания для решения в аудитории:

Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

1. $y_1=4-x^2$; $y_2=x^2-2x$.

2. $x=\arccos y$, $x=0$, $y=0$.

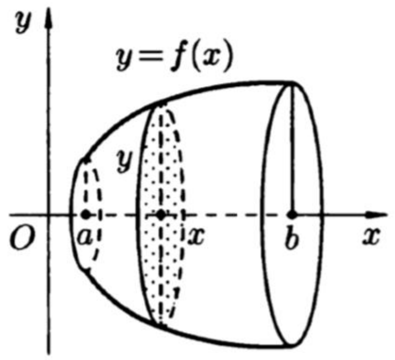
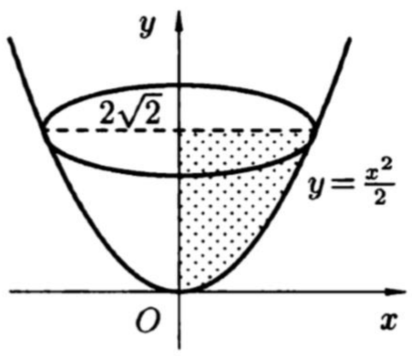
3. $y = -x^2$, $y = e^x$, $x = 1$, $x = 0$.

8.3. Вычисление объемов тел вращения

При вращении плоской кривой вокруг одной из координатных прямых получается объемная фигура - *тело вращения*.

Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения, есть круг, например, с радиусом $y = f\left(x\right)$, при вращении вокруг оси *OX*. Его площадь $S\left(x\right) = \pi y^2$.

Тогда объем тела по площади параллельных сечений, равен:

 Рисунок 20	$V_x = \pi \int\limits_a^b y^2 dx$, (41) при вращении вокруг оси *OX*
 Рисунок 21	$V_y = \pi \int\limits_a^b x^2 dy$, (42) при вращении вокруг оси *OY*.

Пример 1. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси *Oy* (см. рис. 21).

По формуле (42) находим:

$$V_y = \pi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} 2ydy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi.$$

Если фигура, ограничена кривыми $y_1 = f_1(x)$ *и* $y_2 = f_2(x)$; $0 \le f_1(x) \le f_2(x)$ и прямыми $x = a, x = b$, вращается вокруг оси OX, то объем тела вращения:

$$V_x = \pi\int_a^b (y_2^{\,2} - y_1^{\,2})dx . \qquad (43)$$

Если фигура ограничена кривыми $x_1 = \varphi_1(y)$ и $x_2 = \varphi_2(y)$ $(0 \le \varphi_1(y) \le \varphi_2(y))$ и прямыми $y = c;\ \ y = d$ вращается вокруг оси OY, то объём тела вращения:

$$V_y = \pi\int_c^d (x_2^{\,2} - x_1^{\,2})dy . \qquad (44)$$

Пример 2. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y = 2x - x^2$; $y = -x + 2$, вокруг Ox.

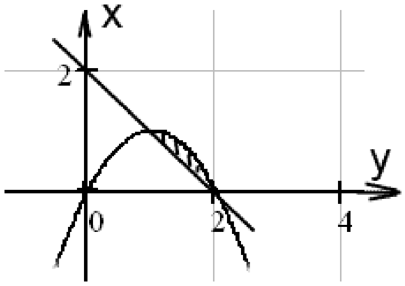


Рисунок 22

По формуле (43) получим

$$V_x = \pi\int_1^2 \left[(2x - x^2)^2 - (2 - x)^2 \right] dx =$$

$$= \pi\int_1^2 \left[\left(4x^2 + x^4 - 4x^3 \right) - \left(2 - x \right)^2 \right] dx =$$

$$= \pi\left(\frac{4}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{(2 - x)^3}{3} \right)\Bigg|_1^2 = \pi\left(\frac{4}{3}(8 - 1) + \frac{32 - 1}{5} - (16 - 1) + \frac{(0 - 1)}{3} \right) = -\pi\frac{7}{15},$$

$$V = \frac{7}{15}\pi .$$

Задания для решения в аудитории:

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций.

1. $y = -x^2 + 5x - 6,\quad y = 0.$ (ось вращения Ox)

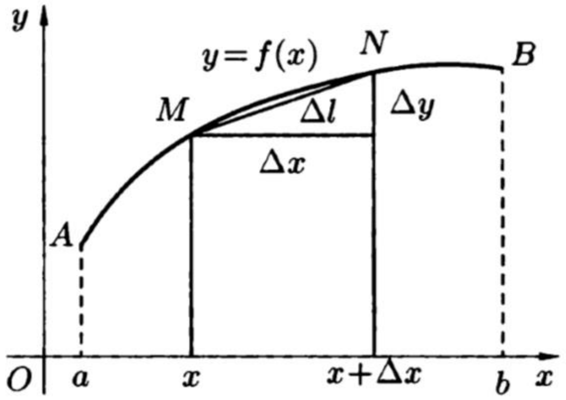
2. $y = x^2$, $y^2 - x = 0$.(ось вращения Ox)

3. $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$ (ось вращения Oy)

4. $y = x^2$, $y = x^3$ (ось вращения Oy)

8.4. Вычисление длины дуги плоской кривой

Используя теорему Пифагора и кусочно-линейную аппроксимацию плоской кривой, получим



$$l=\int_A^B dl=\int_A^B\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Рисунок 23 - Длина дуги плоской кривой

Длина дуги кривой определяется по формулам:

для кривой, заданной в декартовой системе координат:

$$y=f(x),\qquad l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx;\qquad (45)$$

для кривой, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta,\qquad l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,dt\qquad (46)$$

для кривой, заданной в полярных координатах:

$$r=r(\varphi),\quad \alpha\le\varphi\le\beta,\qquad l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(r'_\varphi\right)^2+r^2}\,d\varphi.\qquad (47)$$

Последнее выражение получено посредством разложения вектора $r(\varphi)$ на проекции $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$, связывающих полярные и декартовы координаты. Если параметром считать угол φ, то кривая *AB* задана параметрически. Воспользовавшись формулой (46), получим

$$x'_\varphi=r'_\varphi\cos\varphi-r\sin\varphi;\qquad y'_\varphi=r'_\varphi\sin\varphi+r\cos\varphi;$$

$$\left(x'_\varphi\right)^2+\left(y'_\varphi\right)^2=\left(r'_\varphi\cos\varphi-r\sin\varphi\right)^2+\left(r'_\varphi\sin\varphi+r\cos\varphi\right)^2=\left(r'_\varphi\right)^2+r^2.$$

В результате получаем (47).

Пример 1. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln x$, содержащейся между точками, для которых $x=\sqrt{8}$ и $x=\sqrt{15}$.

Воспользуемся формулой (45).

Здесь $a=\sqrt{8}$; $b=\sqrt{15}$; $f(x)=ln\,x$; $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, тогда

$$l=\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1}=t;\ x^2+1=t^2;\ xdx=tdt\\ x=\sqrt{8};\ t=3;\qquad x=\sqrt{15};\ t=4\end{array}\right|=$$

$$=\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{x^2+1}\cdot xdx}{x^2}=\int_3^4\frac{t\cdot tdt}{t^2-1}=\int_3^4\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int_3^4\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_3^4=$$

$$=4+\frac{1}{2}ln\frac{3}{5}-3-\frac{1}{2}ln\frac{2}{4}=1+\frac{1}{2}ln\frac{3\cdot 4}{5\cdot 2}=1+\frac{1}{2}ln\frac{6}{5}.$$

Пример 2. Вычислить длину дуги кривой, заданную параметрически

$$\begin{cases}x=4(cos\,t+t\,sin\,t)\\ y=4(sin\,t-t\,cos\,t)\end{cases}\quad 0\le t\le 2.$$

Воспользуемся формулой (46).

$$x'=4(-sin\,t+sin\,t+t\,cos\,t)=4t\,cos\,t;\quad y'=4(cos\,t-cos\,t+t\,sin\,t)=4t\,sin\,t.$$

$$l=\int_0^2\sqrt{16t^2cos^2t+16t^2sin^2t}\,dt=\int_0^2 4tdt=2t^2\Big|_0^2=2\cdot 2^2=8.$$

Пример 3. Вычислить длину дуги кривой, заданную уравнением в полярных координатах $\rho=2e^{4\varphi/3}$; $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2.$

Воспользуемся формулой (47). $\rho'=\dfrac{8}{3}e^{4\varphi/3}$.

$$l=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{4e^{8\varphi/3}+\frac{64}{9}e^{8\varphi/3}}d\varphi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\frac{100}{9}e^{8\varphi/3}}d\varphi=\frac{10}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{4\varphi/3}d\varphi=$$

$$=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{4}e^{4\varphi/3}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{5}{2}\left(e^{\frac{2\pi}{3}}-e^{-\frac{2\pi}{3}}\right).$$

Задания для решения в аудитории:

1) Вычислить длину дуги кривой, заданной в прямоугольной системе координат

$$y=\sqrt{1-x^2}+arcsin\,x,\ 0\le x\le\frac{8}{9}.$$

2) Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$1.\begin{cases} x = 5\left(t - \sin t\right), \\ y = 5\left(1 - \cos t\right), \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi.$$

8.5. Вычисление площади поверхности вращения

Найдем площадь S поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox (рисунок 24). Для этого, по-прежнему, воспользуемся кусочно-линейной аппроксимацией кривой. Тогда элементарный элемент тела вращения можно считать усеченным конусом (рисунок 25), площадь боковой поверхности которого вычисляется по известной формуле

$$S_Б = 2\pi \frac{R+r}{2} l = 2\pi R_{ср} l, \tag{48}$$

где $R_{ср}$ - среднее значение радиусов R и r; l - образующая.

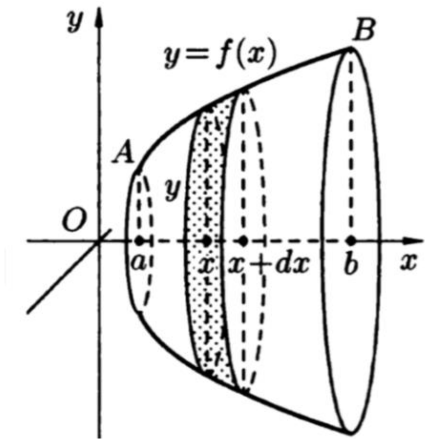


Рисунок 24

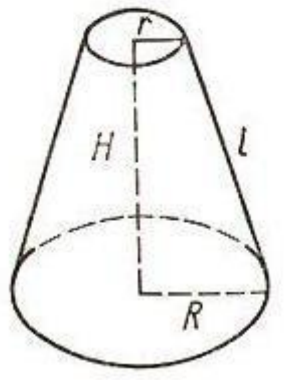


Рисунок 25

Найдем дифференциал площади ds усеченного конуса с образующей dl, и радиусами оснований y и $y+dy$. Площадь его боковой поверхности равна

$$ds = \pi\left(y + y + dy\right)\cdot dl = 2\pi y dl + \pi dy dl.$$

Отбрасывая произведение $dydl$ как бесконечно малую высшего порядка, чем ds, получаем $ds = 2\pi y dl$, или, так как $dl = \sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx$, то $ds = 2\pi y\sqrt{1+\left(y'_z\right)^2}dx.$

Интегрируя полученное равенство в пределах от $x=a$ до $x=b$, получаем искомую *площадь поверхности вращения*

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx. \tag{49}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями, то по аналогии с (46)

$$S_x = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}dt. \tag{50}$$

Если кривая задана в полярной системе координат, то по аналогии с (47)

$$S_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r\sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(r'_{\varphi}\right)^2}\, d\varphi . \qquad (51)$$

При вращении кривой вокруг оси OY

$$S_y = 2\pi \int_{c}^{d} x\sqrt{1+(x'_y)^2}\, dy . \qquad (52)$$

Пример 1. Найти площадь поверхности шара радиуса R.

Поверхность шара образована вращением полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R\le x\le R$, вокруг оси Ox. По формуле (49) находим

$$S_x = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^{R} R dx = 2\pi R \cdot x\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2 .$$

Пример 2. Дана циклоида

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi .$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением ее вокруг оси Ox.

Решение: При вращении половины дуги циклоиды вокруг оси Ox площадь поверхности вращения равна, см (50)

$$\frac{1}{2}S_x = 2\pi \int_0^{\pi} a(1-\cos t)\cdot \sqrt{\left(a(1-\cos t)\right)^2 + \left(a\sin t\right)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} a^2 \cdot 2\sin^2\frac{t}{2} \cdot \sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\, dt = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^2\frac{t}{2}\cdot \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt =$$

$$8\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^2\frac{t}{2}\cdot \sin\frac{t}{2}\, dt = = 8\pi a^2 \int_0^{\pi} \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\, dt =$$

$$\left| \begin{aligned} & u=\cos\frac{t}{2};\ t=0,\ u=1;\ t=\pi,\ u=0 \\ & du = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\, dt; \end{aligned} \right| =$$

$$= -2\cdot 8\pi a^2 \int_1^{0} \left(1-u^2\right) du = -16\pi a^2 \left(u - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^0 = -16\pi a^2 \frac{2}{3} .$$

т.е. $\frac{1}{2}S_x = \frac{32}{3}\pi a^2$. Следовательно, $S_x = \frac{64}{3}\pi a^2$.

Пример 3. Найти площадь тора, образующегося при вращении окружности $r = sin\phi$ вокруг оси Ox.

$$S_x = 2\pi\int_0^{\pi} sin\phi \cdot sin\phi\sqrt{sin^2\phi + cos^2\phi}\,d\phi = \pi\int_0^{\pi}(1 - cos2\phi)d\phi = \pi^2 .$$

Задания для решения в аудитории:

1. Найти площадь поверхности, полученной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y = 2\sqrt{x}$, $0 < x < 1$.

2. Найти площадь поверхности, образованную вращением вокруг оси OX дуги $y = cos3x$ от $x = 0$ до $x = \dfrac{\pi}{2}$

Приложение 1. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Правила дифференцирования

1.$(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2.$(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;

3.$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$;

4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u),\ u = \varphi(x)$;

5. $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$.

Формулы дифференцирования

1.$(c)' = 0$;

2.$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \left(u^{-1}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$

3.$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4.$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

5.$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

6.$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

7.$(tg u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

8.$(ctg u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

9.$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

10.$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11.$(arctg u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

12.$(arcctg u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13.$(sh u)' = ch u \cdot u'$;

14.$(ch u)' = sh u \cdot u'$;

15.$(th u)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$;

16.$(cth u)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$.

Приложение 2. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C;$

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{ln\,a} + C; \qquad \int e^u du = e^u + C;$

4. $\int sin\,udu == -cos\,u + C \qquad \left(\int shu \cdot du = chu + C\right);$

5. $\int cos\,udu = sin\,u + C \qquad \left(\int chu \cdot du = shu + C\right);$

6. $\int tgudu = -ln|cos\,u| + C;$

7. $\int ctgudu = ln|sin\,u| + C;$

8. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C \qquad \left(\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C\right);$

9. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C \qquad \left(\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C\right);$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\,sin\frac{u}{a} + C;$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C;$

13. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$

14. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{u}{a} + C.$

15. $\int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} ln\left|u + \sqrt{a^2 + u^2}\right| + C;$

16. $\int \frac{du}{sin\,u} = ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C;$

17. $\int \frac{du}{cos\,u} = ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

Приложение 3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОДСТАНОВКИ

1. Интегрирование функции от линейного двучлена:

если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)\cdot dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

2. Формула интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu.$

3. Универсальная тригонометрическая подстановка $tg\frac{x}{2} = t$, тогда

$$sin\,x = \frac{2t}{1+t^2},\quad cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x = 2arctgt,\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

4. Тригонометрическая подстановка $t = tgx$, тогда

$$x = arctgt;\ dx = \frac{dt}{1+t^2};\quad cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2};\quad sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

5. Формулы тригонометрии:

$$cos^2 x = \frac{1}{2}(1+cos\,2x);\qquad sin^2 x = \frac{1}{2}(1-cos\,2x);$$

$$sin\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}\big(sin(\alpha-\beta) + sin(\alpha+\beta)\big),$$

$$cos\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}\big(cos(\alpha-\beta) + cos(\alpha+\beta)\big),$$

$$sin\,\alpha\,sin\,\beta = \frac{1}{2}\big(cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)\big).$$

6. Использование тригонометрических подстановок:

$$\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \quad\to\quad x = a\cdot sint;$$

$$\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx \quad\to\quad x = a\cdot tgt;$$

$$\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx \quad\to\quad x = \frac{a}{sint}.$$

Приложение 4. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

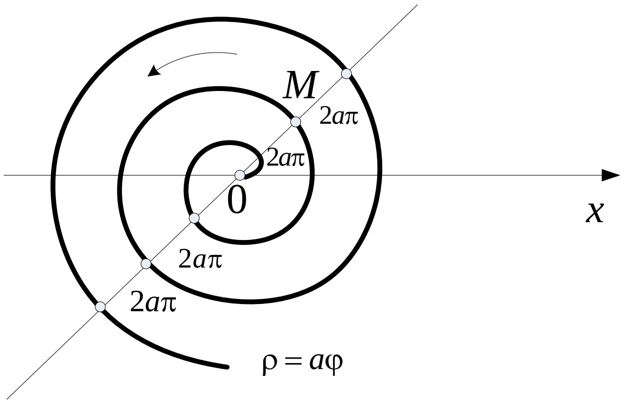


Рисунок 1 - Спираль Архимеда

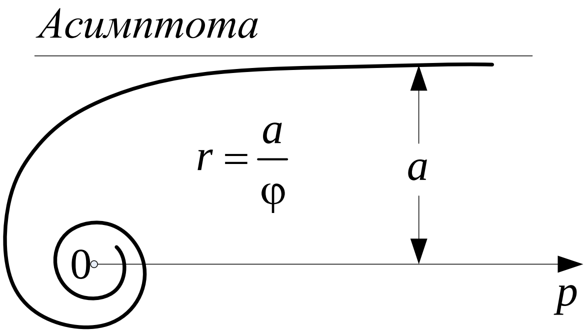


Рисунок 2 - Гиперболическая спираль

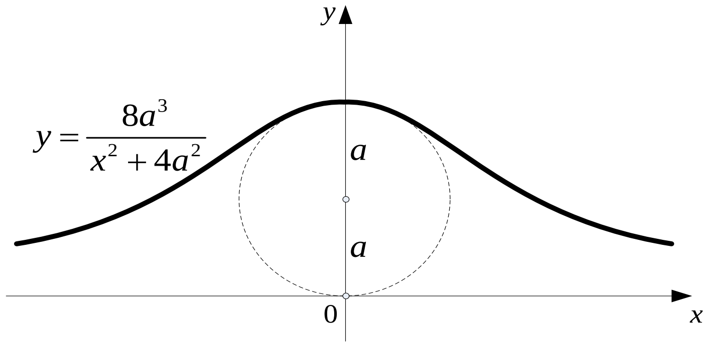


Рисунок 3 - Локон

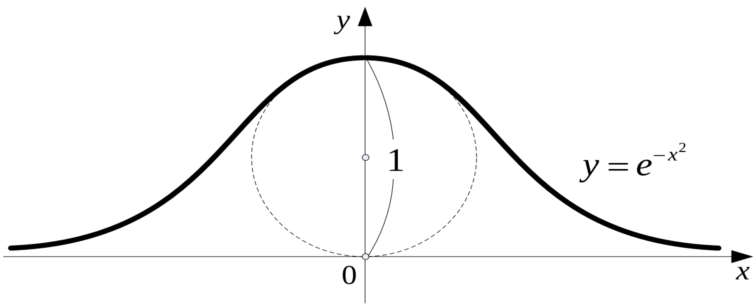
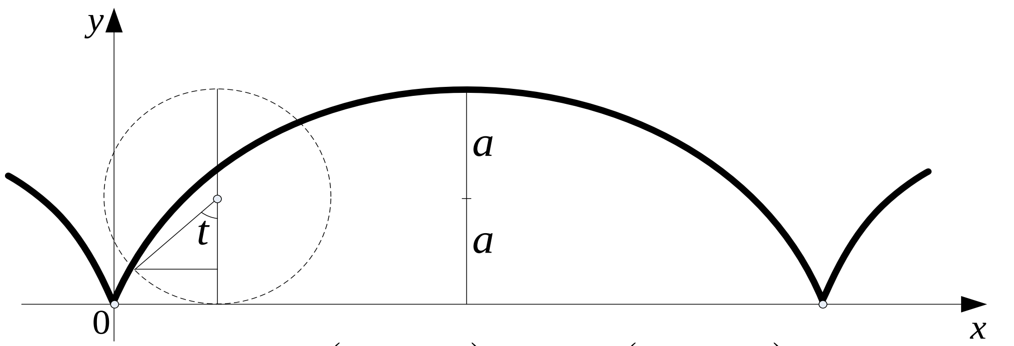


Рисунок 4 - Кривая вероятностей



$$x = a\left(t - \sin t\right) \quad y = a\left(1 - \cos t\right)$$

Рисунок 5 - Циклоида

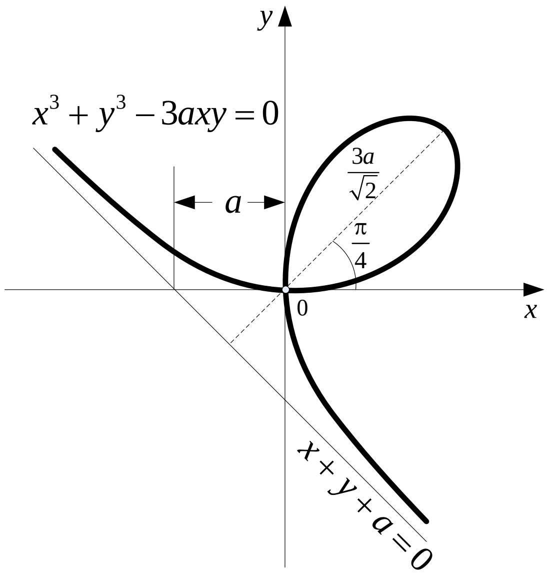


Рисунок 6 - Декартов лист

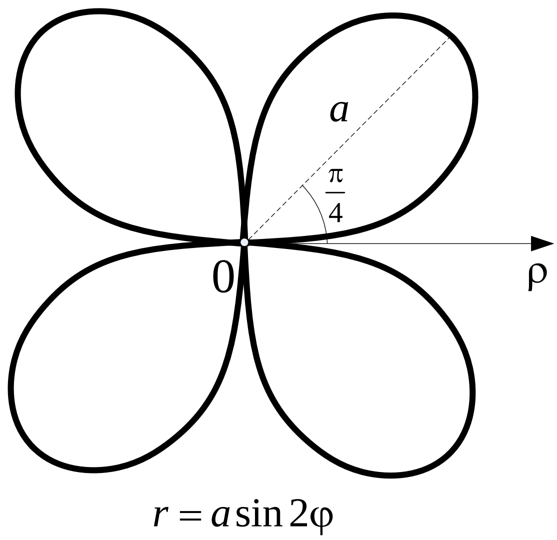


Рисунок 7 - Четырёхлепестковая роза

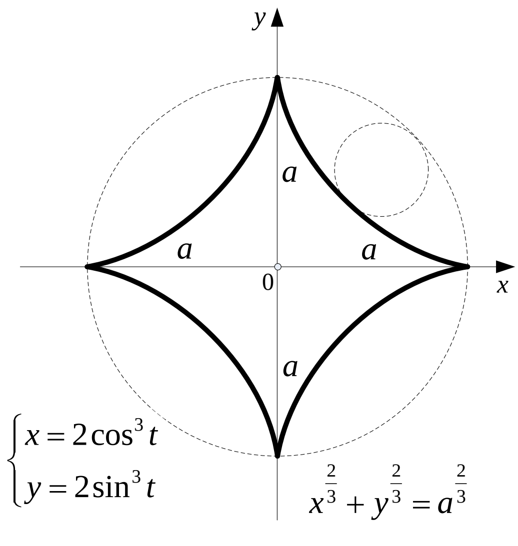


Рисунок 8 - Астроида

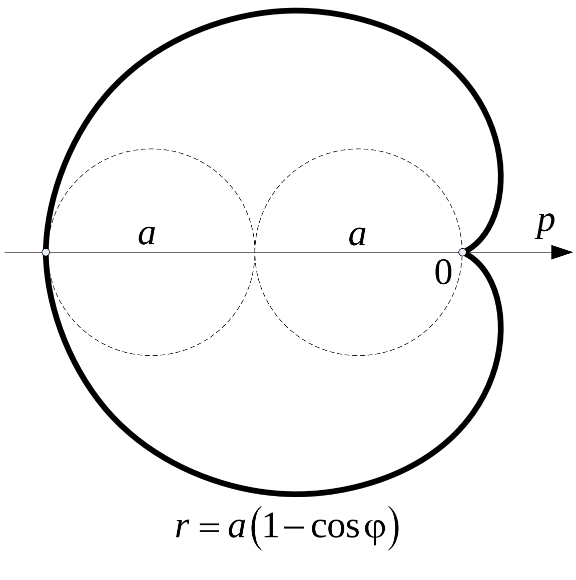


Рисунок 9 - Кардиоида

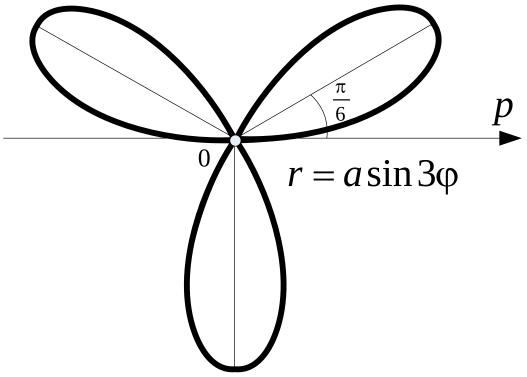


Рисунок 10 - Трёхлепестковая роза

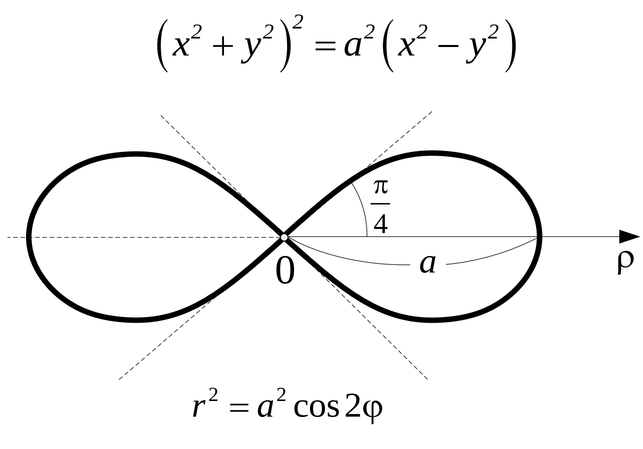


Рисунок 11 - Лемниската Бернулли

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. -10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.

2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для студентов втузов в 2-х т. Т. 1. - изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - (Гр.).

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для студентов втузов в 2-х т. Т. 2. - изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 544 с. - (Гр.).

4. Ильин, В. А. Высшая математика : учебник для студентов вузов / Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект, 2006. - 600 с. - (Классический университетский учебник. Гр.).

5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М.:, Физматлит, 2006. — 335 с.

6. Литвин Д.Б., Таволжанская О.Н., Мелешко С.В., Гулай Т.А. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : учебное пособие. - Ставрополь : Сервисшкола, 2016. - 80с.

7. Литвин Д.Б., Мелешко С.В., Яновский А.А. Определенный интеграл. Функции нескольких переменных: Учебное пособие, 2-е издание– Ставрополь : Сервисшкола, 2017. – 62с.